Hyperbola a přímka

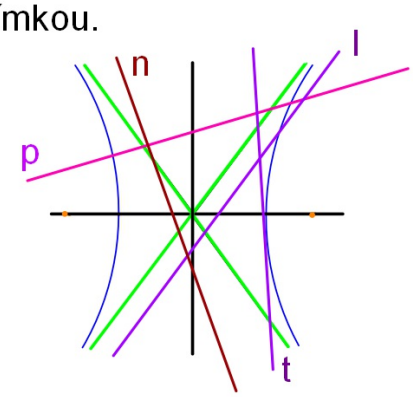
16

Dr.Brom Jiří
Gymnázium Týn nad Vltavou
2.1.2013
Výukový materiál pro Oktávu
Matematika - Analytická geometrie - Kuželosečky - Hyperbola- Hyperbola a přímka
Využití - výklad a procvičení tématu

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hyperbola a přímka

Přímka s hyperbolou může mít dva průsečíky, jeden průsečík nebo může být vnější přímkou.



Při určení vzájemné polohy zpravidla dosazujeme z rovnice přímky do rovnice hyperboly. U vznikající kvadaratické rovnice je nejvýhodnější sledovat hodnoty diskriminantu D.

Pro přímku p bude D větší než nula - 2 průsečíky s hyperbolou

pro přímku l,t bude D roven nule - 1 průsečík s hyperbolou

l je přímka rovnoběžná s aymptotou, t, je tečna ve vnějším bodě

pro přímku n bude D menší než nula - žádný vzájemný průsečík.

Př. 1 :

Diskutuj vzájemnou polohu hyperboly $x^2 - y^2 = 25$
a přímky $p : y = x\sqrt{2} + q.$

Dosadíme do rovnice hyperboly a získáme kvadratickou rovnici $x^2 + 2qx\sqrt{2} + q^2 + 25 = 0$

$a = 1,\ b = 2q\sqrt{2},\ c = q^2 + 25$

$D = 4\left(q^2 - 25\right) \Rightarrow |q| = 5$ tečna, $|q| >$ sečna, $|q| < 5$ nemá průsečík

Hyperbola, $S[0,0]$

$a)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tečna $t: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

asymptota $a_1: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow$ přímka $l_1: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$

asymptota $a_2: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow$ přímka $l_2: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}$

$b)\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow$ tečna $t: \frac{yy_0}{b^2} - \frac{xx_0}{a^2} = 1$

asymptota $a_1: \frac{y}{b} - \frac{x}{a} - = 0 \Rightarrow$ přímka $l_1: \frac{y}{b} - \frac{x}{a} = \frac{y_0}{b} - \frac{x_0}{a}$

asymptota $a_2: \frac{y}{b} - \frac{x}{a} - = 0 \Rightarrow$ přímka $l_2: \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = \frac{y_0}{b} + \frac{x_0}{a}$

Př.2:

Bodem $M\left[\sqrt{18}, 2\right]$ veď přímky, které mají

s hyperbolou h: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ jeden společný bod.

$a)$ tečna t: $\frac{x\sqrt{18}}{9} - \frac{2y}{4} = 1 \rightarrow y = \frac{2\sqrt{2x}}{3} - 2$

$b)$ l_1: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{18}}{3} + \frac{2}{2}$, $\quad l_2$: $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{18}}{3} - \frac{2}{2}$

Hyperbola $S[m, n]$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \pm 1$$

tečna $t : \frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = \pm 1$

přímky rovnoběžné s asymptotami

$$l_{12} : \frac{(x-m)}{a} \pm \frac{(y-n)}{b} = \frac{(x_0-m)}{a} \pm \frac{(y_0-n)}{b}$$

Př.3 :

Veď bodem $M\ [2,6]$ přímky které mají jeden průsečík s hyperbolou. Hyperbola $\frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y-3)^2}{3} = 1$

tečna $t: \frac{(x-4)(1-4)}{1} - \frac{(y-3)(6-3)}{3} = 1 \Rightarrow y = 14 - 3x$

přímky rovnoběžné s asymptotami

$l_{12}: \frac{(x-4)}{1} \pm \frac{(y-3)}{3} = \frac{(2-4)}{\sqrt{3}} \pm \frac{(6-3)}{\sqrt{3}}$

Pracovní list :

1. Bodem A[2,1] veď přímky, které mají s hyperbolou $x^2 - 2y^2 = 2$ jediný společný bod.

2. Hyperbola má rovnici $(x-3)^2 - 4y^2 = 1$. Najdi její průsečíky s osou y a rovnice tečen v těchto bodech.

3. Urči tečny hyperboly h : $2x^2 - y^2 = 2$ rovnoběžné s přímkou p : y = 2x

4. Napiš rovnici tečny k h : $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 127 = 0$ v M[8,-1/4]

5. Urči rovnici tečny z vnějšího bodu M[6,6] k hyperbole s rovnicí h : $x^2 - 4y^2 = 36$

6. Diskutuj vzájemnou polohu přímky p : x - y + c =0 a hyperboly h : $x^2 - 4y^2 = 36$

Zdroj :
Končadrle,M.,L.Boček: Analytická geometrie pro gymnázia.
Nakladatelství Prometheus s.r.o, Praha, 1995.