Smíšený součin

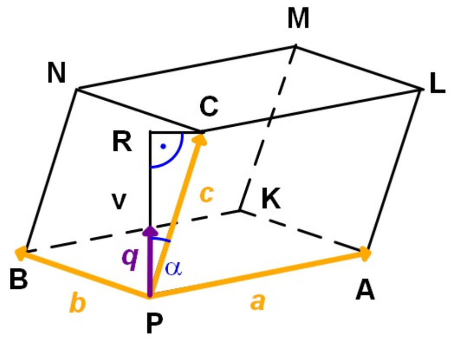
9

Dr.Brom Jiří
Gymnázium Týn nad Vltavou
26.3.2013
Výukový materiál pro Oktávu
Matematika - Analytická geometrie - Vektory
Vektorový součin
Využití - výklad a procvičení tématu

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Smíšený součin

Smíšený součin se skládá ze součinu skalárního a vektorového.
Využijeme jej k určení objemu rovnoběžnostěnu.



Objem tělesa určíme jako násobek základny a výšky.
Základna PAKB má S=l**a** x **b**l
Výšku PR = v určíme pomocí vektoru **c**.
v=l**c**l.lcosαl.

Nyní provedeme několik úpravových manévrů s cílem výpočet zjednodušit.
Při výpočtu V není třeba se zabývat úhlem mezi výškou v a vektrorem **q**.

Ze skalárního součinu plyne pro úhel mezi vektory **q**,**c,**
že **g**.**c**=l**q**l.l**c**l.cosα.
Vektor **q** zvolíme výhodně - jako jednotkový.

$$\vec{q} = \frac{\left(\vec{a}\ x\ \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right|}$$

Pro objem tělesa tak získáme :

$$\underline{V} = \mathrm{Sv} = \left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right| . \left|\vec{c}\right| . \cos(\alpha) = \left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right| . \left|\vec{c}\right| . \left|\vec{q}\right| \cos(\alpha) =$$

$$\left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right| . \vec{c}\ . \vec{q} = \left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right| . \left|\vec{c}\right| . \frac{\left(\vec{a}\ x\ \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right|} = \underline{\vec{c}\ .\left(\vec{a}\ x\ \vec{b}\right)}$$

Báze vektorů (**a**,**b**,**c**) může být jak pravotočivá tak levotočivá. To při výpočtu nevíme a druhém případě by nám V vycházel záporný. Lehce to vyřešíme pomocí absolutní hodnoty.

Objem tělesa tedy vypočítáme pomocí vztahu :

$$\boxed{V = \left| \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \right|}$$

Př.1:

Je dán rovnoběžník ABCDEFGH. Vypočítejte jeho objem.
A[0,0,0],B[5,0,0]D[0,6,0],E[1,1,4]

a =B-A =(5,0,0), **b** =D-A =(0,6,0), **c** =E-A =(1,1,4)

Obsah základny S = **w** = **a** x **b** = 30j^2

Objem tělesa V = **c.w** = 30+30+120 =180j^3

Dá se ukázat, že objem čtyřstěnu je roven 1/6 objemu rovnoběžnostěnu.

Pracovní list :

1. Jsou dány body A[1,3,-2],B[3,-1,1],C[0,1,7],D[8,0,3] čtyřstěnu.
   a. vypočítej obsahy jeho stěn.
   b. vypočítej úhel α v trojúhelníku ABC
   c. vypočítej objem čtyřstěnu.

2. Jsou dány body A[0,3,-2],B[3,2,1],C[4,1,7],E[4,-2,3] rovnoběžnostěnu ABCDEFGH.
   a. vypočítej obsah jeho základny ABCD
   b. vypočítej jeho objem

Zdroj :
***Končadrle,M.,L.Boček: Analytická geometrie pro gymnázia.** Nakladatelství Prometheus s.r.o, Praha, 1999.*