

Vektorový součin

8

Dr. Brom Jiří

Gymnázium Týn nad Vltavou

25.3.2013

Výukový materiál pro Oktávu

Matematika - Analytická geometrie - Vektory

Vektorový součin

Využití - výklad a procvičení tématu



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vektorový součin

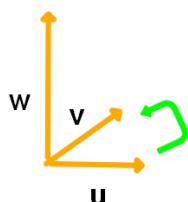
Vektorový součin vektorů je vektor.

Zápis : $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$

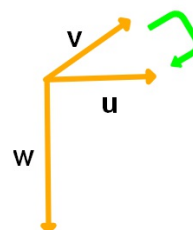
Vlastnosti :

- vektorový součin dvou vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ neležících na jedné přímce je vektor $\mathbf{w}$ těchto vlastností :
 1. je kolmý na oba vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
 2. báze $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ je pravotočivá
 3. $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha$.
- vektorový součin vektorů ležících na jedné přímce je nulový vektor.

To znamená, že jestliže změníme pořadí násobení vektorů a báze má být podle definice pravotočivá, zachová se sice velikost vektoru w , ale musí se změnit jeho směr.



$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$



Výpočet souřadnic $w(w_1, w_2, w_3)$:

$$\begin{array}{ccccc} u_2 & & u_3 & & u_1 \\ v_2 & \times & v_3 & \times & v_1 \end{array}$$

$$w_1 = u_2 v_3 - v_2 u_3 \quad w_2 = u_3 v_1 - v_3 u_1 \quad w_3 = u_1 v_2 - v_1 u_2$$

Př.1:

Vypočítej vektorový součin $w = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorů $\mathbf{u}(1,3,-1), \mathbf{v}(2,4,5)$

Napišeme si schéma a vypočítáme :

$$w = (3 \cdot 5 - (-1) \cdot 4, (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 5, 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = (19, -7, -2)$$

Pracovní list :

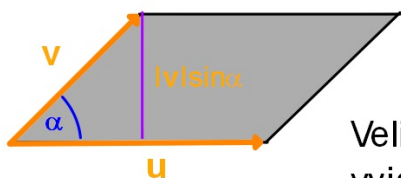
1. Vypočítej vektorový součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

a. $\mathbf{a}=(3,2,1)$, $\mathbf{b}=(-1,1,0)$

b. $\mathbf{a}=(2,1,1)$, $\mathbf{b}=(3,3,2)$

c. $\mathbf{a}=(1,0,3)$, $\mathbf{b}=(-1,0,-2)$

Geometrický význam vektorového součinu :



$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha$$

Velikost vektoru $\mathbf{w}$ číselně vyjadřuje **obsah rovnoběžníku**.

Pokud počítáme obsah trojúhelníku, stačí získanou hodnotu vydělit dvěma.

Př.2:

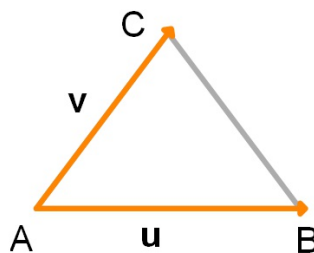
Vypočítej obsah trojúhelníku ABC. $A[1,2,3], B[-1,2,-2], C[4,5,6]$

Situaci si můžeme načrtnout :

$$\mathbf{u} = C - A = (3, 3, 3)$$

$$\mathbf{v} = B - A = (-2, 0, -5)$$

$$\mathbf{w} = (-15 + 0, -6 + 15, 0 + 6) = (-15, 9, 6)$$



$$|\vec{w}| = \sqrt{225 + 81 + 36} = \sqrt{342} \text{ to je obsah rovnoběžníku}$$

$$\text{Obsah trojúhelníku je tedy } S_{\Delta} = \frac{\sqrt{342}}{2} \cong 9,25j^2$$

Pracovní list :

1. Vypočítej obsah rovnoběžníku ABCD
 $A[1,3,1], B[4,1,3], C[1,4,-1]$
2. Vypočítej obsah trojúhelníku ABC.
 $A[1,3,2], B[4,-2,3], C[0,5,-4]$
3. Vypočítej obsah trojúhelníku ABC v rovině.
 $A[-1,-1], B[2,0], C[1,3]$
4. Vypočítej obsah rovnoběžníku ABCD v rovině.
 $A[2,1], B[1,3], C[-2,-1]$

Zdroj :

Končadrle, M., L. Boček: Analytická geometrie pro gymnázia. Nakladatelství Prometheus s.r.o, Praha, 1999.