Skalární součin vektorů

6

Dr.Brom Jiří
Gymnázium Týn nad Vltavou

22.3.2013

Výukový materiál pro Oktávu

Matematika - Analytická geometrie - Vektory

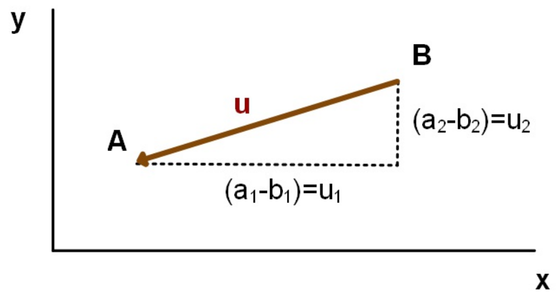
Násobení vektoru číslem

Využití - výklad a procvičení tématu

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Skalární součin vektorů

Velikost vektoru - velikost orientované úsečky **AB** určující vektor **u**.
Zápis - l**u**l
Jednotkový vektor u_j - vektor, jehož velikost je rovna jedné l**u**l =1



Velikost orientovanéúsečky je rovna vzdálenosti krajních bodů.
Určíme ji tedy pomocí Pythagorovy věty.

Pro každý vektor prostoru (roviny) **u**(u_1,u_2,u_3) platí :

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}}$$

Odtud plyne, že **u=o** má velikost I**u**I = 0

Každý vektor se dá převést na jednotkový, jestliže jej vydělíme jeho velikostí.

Př.1

Urči velikost vektoru **u**(1,2,3) a převeď jej na jednotkový vektor.

Velikost $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$u\left(1,2,3\right) \Rightarrow u_j\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{4}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}}\right)$

Ze se jedná *o* u_j ověříme určením velikosti vektoru u_j.

$\left|\overrightarrow{u}_j\right| = \left|\frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14}\right| = 1$

Skalární součin dvou vektorů v prostoru $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}(v_1,v_2,v_3)$
je <u>číslo</u> $\mathbf{uv} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

Obdobně postupujeme v rovině.

Vlastnosti :
Jsou dány vektory **u**,**v**,**w**, číslo c.

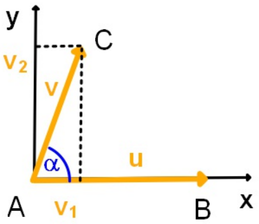
$$\mathbf{uv} = \mathbf{vu}$$
$$(c\mathbf{u})\mathbf{v}=c(\mathbf{uv})$$
$$\mathbf{w}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{wu} + \mathbf{wv}$$

Př.2
Urči skalární součin vektorů $\mathbf{u}(1,2,3)$,$\mathbf{v}(-2,3,1)$

$\mathbf{uv} = -2 + 6 + 3 =7$

Vidíme, že platí $\mathbf{uu} = \mathbf{u}^2 = |\mathbf{u}|^2$

Skalární součin budeme využívat především k **určení úhlu přímek**, na kterých dané vektory leží.



Velikost konvexního úhlu BAV nazýváme úhel vektorů.

u=(I**u**I,0), v=(I**v**Icosα,I**v**Isinα)

Tedy **uv = IuIIvIcosα** nebo $\cos(\alpha) = \frac{uv}{|u||v|}$

<ins>Skalární součin **uv** je roven nule</ins>, pokud je jeden z vektorů nulový nebo jsou **<ins>oba vektory nenulové a navzájem kolmé</ins>**.

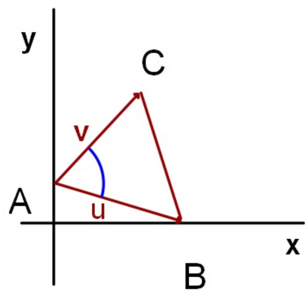
Př. 3 :
Je dán trojúhelník A[0,1,0], B[3,0,0], C[1,3,0]. Urči úhel při vrcholu A.

Zvolíme **u**=(B-A)=(3,-1,0), **v**=(C-A)=(1,2,0)

$$\left|u\right| = \sqrt{9+1+0} = \sqrt{10}, \quad \left|v\right| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$$

$$\mathrm{uv} = 3.1 + \left(-1\right).2 + 0 = 1$$

$$\cos\left(a\right) = \frac{\mathrm{uv}}{|u||v|} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \triangleq 81°52'$$



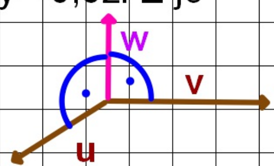
Důležité je **umět určit vektor, který je k zadanému vektoru kolmý.**
Postup v rovině je jednoduchý - stačí prohodit souřadnice a jedné změnit znaménko.

K vektoru **u**(u_1,u_2) doplníme jako kolmý vektor **u**$'(-u_2,u_1)$. **uu'=0**
Například : **u**(-2,1), na něj je kolmý **v**(1,2) nebo **v**(-1,-2).

V prostoru musíme kolmý vektror určit pomocí skalárního součinu k dvěma vektorům najednou. Řešíme tak soustavu rovnic.

Př.4
Určete vektor **w**(x,y,z) kolmý v prostoru k vektorům **u**(1,2,1),**v**(1,-2,3).

x+2y+z=0
x-2y+3z=0
Sečtením rovnic získáme x=-2z, dosadíme a získáme y=-0,5z. Z je libovolné číslo. w(-2z,0,5z,z), například w(-4,1,2).



Pracovní list :

1. Urči skalární součin vektorů
   - **a. u**(1,2),**v**(-1,1)
   - **b. u**(1,1,3), **v**(2,1,-1)
   - c. I**u**I=1,I**v**I=2, $\alpha=60°$
2. Vypočítej úhel vektorů
   - **a. u**(1,1), **v**(-1,1)
   - **b. u**(1,1,-1), **v**(2,1,3)
3. Urči číslo t, aby byly vektory navzájem kolmé
   - **a. u**(t,2,-1), **v**(1,-t,3)
   - **b. u**(1,1,2t), **v**(t,t,-1)
4. Vypočítej vnitřní úhly trojúhelníku ABC
   - a. A[0,1],B[-1,2],C[1,3]
   - b. A[1,1,1],B[-1,0,2],C[3,1,2]
5. Urči vektor **v** kolmý k vektroru **u** v rovině
   - **a. u**(1,-2)
   - **b. u**(-2,-5)
6. Urči vektor **w** kolmý k daným vektorům
   - **a. u**(1,-1,2), **v**(3,1,1)
   - **b. u**(1,0,1), **v**(-1,3,2)

Zdroj :
Končadrle,M.,L.Boček: Analytická geometrie pro gymnázia. *Nakladatelství Prometheus s.r.o, Praha, 1999.*