

Hyperbola

analytické vyjádření

15

Dr. Brom Jiří

Gymnázium Týn nad Vltavou

2.1.2013

Výukový materiál pro Oktávu

Matematika - Analytická geometrie - Kuželosečky - Hyperbola -
Analytické vyjádření

Využití - výklad a procvičení tématu



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro bod $X[x, y]$ vyhovující rovnici hyperboly platí :

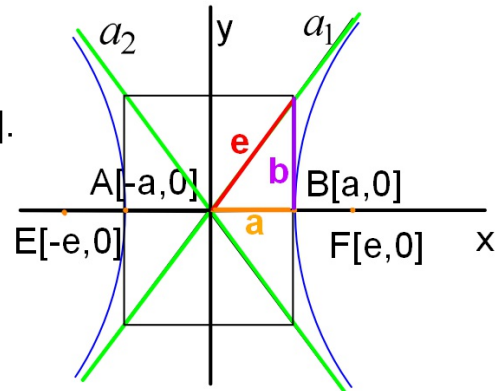
$$||EX| - FX|| = 2a, \text{ tedy}$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

po úpravách dospějeme k rovnici hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

To je **středová rovnice hyperboly** $S[0,0]$.



Asymptota hyperboly

- přímka procházející středem hyperboly

- její směrnice má tvar $|k| = \frac{b}{a} = \tan(\alpha)$,

α je odchylka asymptoty od osy x

- její analytické vyjádření při $S[0,0]$

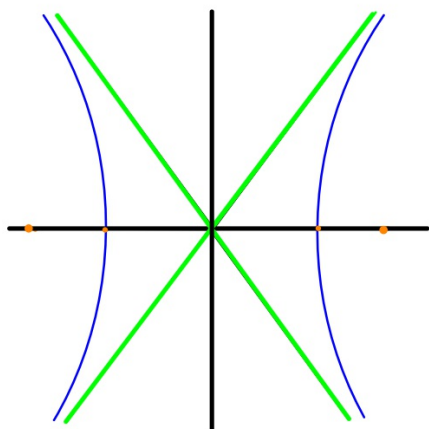
je tedy $y = \pm \frac{b}{a}x$

po rozepsání a_{12} : $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

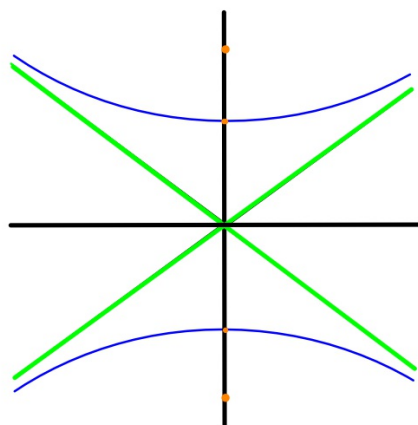
Rovnoosá hyperbola - hyperbola, u které je $a = b$

Podle polohy ohnisek mohou nastat dvě základní situace :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



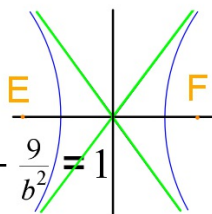
V dalším budeme dodržovat následující značení .
a - velikost poloosy rovnoběžné s osou x
b - velikost poloosy rovnoběžné s osou y

Př. 1

Napiš rovnici hyperboly, pokud víme, že $S [0,0]$, $e = 5$
a její bod X má souřadnice $X[4,3]$

1) předpokládáme $E [-5, 0]$, $F [5, 0]$

bod X vyhovuje rovnici $h: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$



z $e^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 25 - a^2$, dosadíme do rovnice hyperboly,

získáme rovnici $a^4 - 50a^2 + 400 = 0$, řešíme substitucí $a^2 = d$

$d^2 - 50d + 400 = 0$ s řešením $a^2 = 10 \Rightarrow b^2 = 15$,

nevyhovuje $a^2 = 40 \Rightarrow b^2 < 0$. Rovnice $h: \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$

2) předpokládáme $E[0, -5], F[0, 5]$

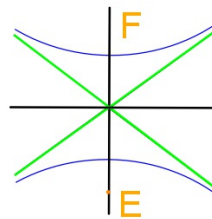
bod vyhovuje rovnici $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{b^2} - \frac{16}{a^2} = 1$

z $e^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 25 - a^2$, dosadíme do rovnice hyperboly

a získáme rovnici $a^4 - 32a^2 + 400 = 0$

s řešením $a^2 = 20 \Rightarrow b^2 = 5$, nevyhovuje $a^2 = 16 \Rightarrow b^2 < 0$

rovnice $h: \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{20} = 1$

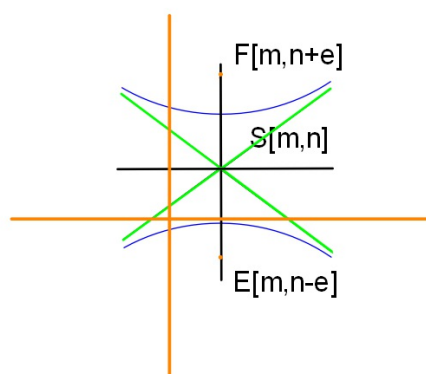
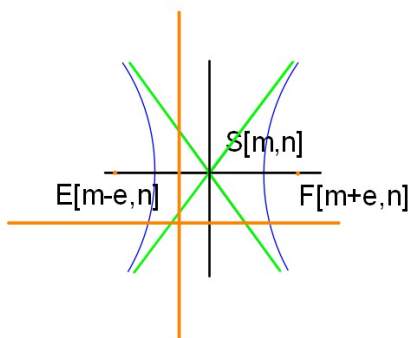


Pokud je střed elipsy v obecné poloze $S[m,n]$, má středová rovnice tvar :

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

s asymptotami $\frac{x-m}{a} = \pm \frac{y-n}{b}$



Př. 2:

Napiš rovnici hyperboly se středem $S[2, -3]$, $e = 5$, $b = 3$. Hlavní osa rovnoběžná se souřadnicovou osou x . Urči souřadnice ohnisek, vrcholů a os. Hyperbolu načrtni.

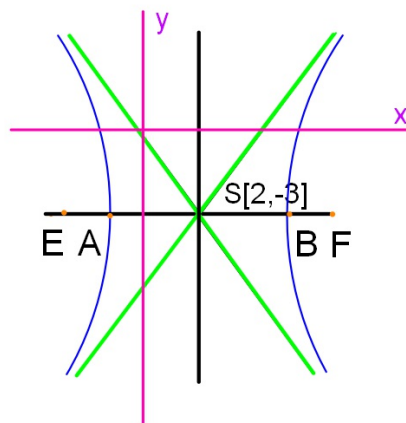
nejprve určíme a $a^2 = e^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$ a je 4

rovnice hyperboly: $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$, $S[2, -3]$

souřadnice ohnisek $E[-3, -3]$, $F[5, -3]$

vrcholy $A[-2, -3]$ $B[6, -3]$

hlavní osa $x = -3$, vedlejší osa $y = 2$



Rozepsáním středové rovnice získáme **obecnou rovnici hyperboly**.

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2py + t = 0 \quad (pq < 0)$$

Př.3:

Hyperbola má obecnou rovnici $h: 3x^2 - y^2 - 24x + 6y + 36 = 0$

Urči její středový tvar, střed, ohniska, vrcholy a asymptoty.

Rovnici upravíme

$$3(x^2 - 8x + 16) - 48 - (y^2 - 6y + 9) + 9 + 36 = 0$$

$$3(x - 4)^2 - (y - 3)^2 = 3$$

$$\frac{(x-4)^2}{1} + \frac{(y-3)^2}{3} = 1 \quad S[4, 3], \quad a = 1, \quad b = \sqrt{3}, \quad e = 2$$

$$A[5, 3], \quad B[3, 3], \quad F[6, 3], \quad E[2, 3], \quad \text{asymptoty: } (x - 4) = \pm \frac{(y - 3)}{\sqrt{3}}$$

Pracovní list :

1. Napiš rovnici hyperboly s ohnisky $E[-2,0]$ $F[18,0]$ a $a=8$.
2. Střed hyperboly $S[-1,2]$, $a=1$, $b=3$. Hlavní osa je rovnoběžná s osou x . Urči ohniska, vrcholy a hyperbolu nakresli.
3. Napiš rovnici elipsy s ohnisky $E[-5,0]$, $F[5,0]$, která prochází $M[1,0]$. Situaci načrtni.
4. Napiš rovnici hyperboly, která má $S[2,-1]$ a prochází body $M[30,23]$, $N[-6,5]$
5. Urči ohniska hyperboly s rovnicí $10x^2 - 5y^2 = 50$. Napiš rovnici hyperboly která má stejné asymptoty jako daná hyperbola, ale prochází bodem $M[10,0]$. Situaci načrtni.
6. Urči střed a ohniska hyperboly $h : x^2 + 6x - y^2 + 6y + 4 = 0$

Zdroj :

**Končadrle, M., L. Boček: Analytická
geometrie pro gymnázia.**

*Nakladatelství Prometheus s.r.o, Praha,
1995.*