

Elipsa

analytické vyjádření

7

Dr. Brom Jiří

Gymnázium Týn nad Vltavou

28.12.2012

Výukový materiál pro Oktávu

Matematika - Analytická geometrie - Kuželosečky - Elipsa -
Analytické vyjádření

Využití - výklad a procvičení tématu



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



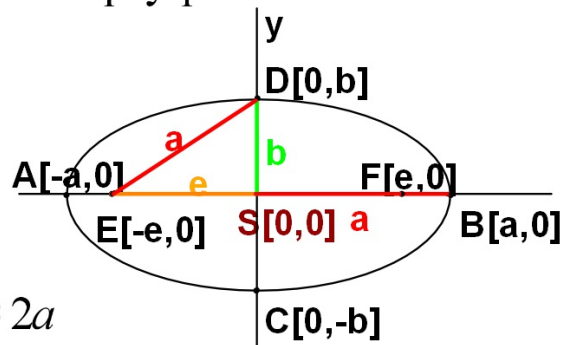
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro bod $X[x, y]$ vyhovující rovnici elipsy platí :

$$|EX| + |FX| = 2a, \text{ tedy}$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

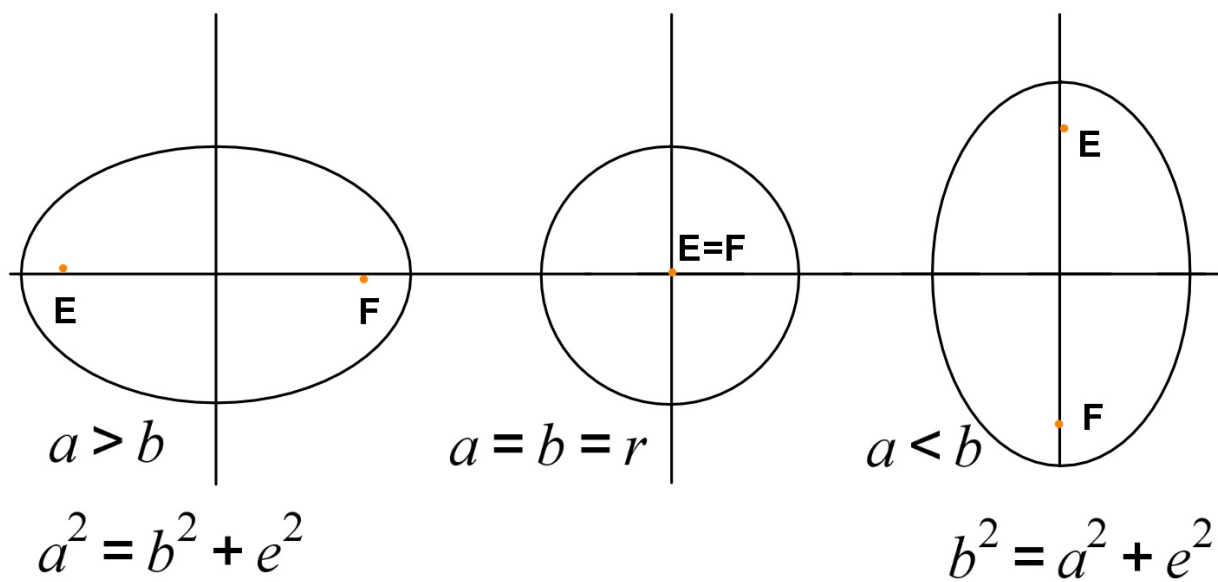


po úpravách dospějeme k rovnici elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

To je **středová rovnice elipsy** $S[0,0]$.

Podle vztahu mezi a , b mohou nastat následující situace :



Při řešení úloh je velmi dobrou pomůckou náčrtek.

V dalším budeme dodržovat následující značení .

a - velikost poloosy rovnoběžné s osou x

b - velikost poloosy rovnoběžné s osou y

Př. 1

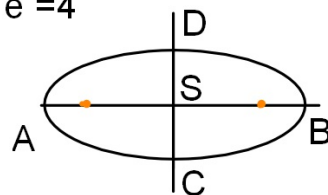
Napiš rovnici elipsy, pokud víme, že $a = 6$, $e = 4$

a) předpokládáme, že $E[-4,0]$, $F[4,0]$

pak je $a > b$ $a^2 = b^2 + e^2$ tedy $b^2 = 20$

rovnice elipsy má tvar

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

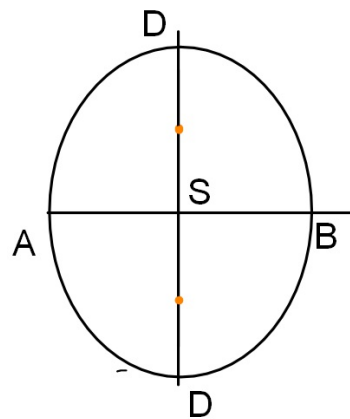


b) předpokládáme, že $E[0,-4]$, $F[0,4]$

pak je $b > a$ $b^2 = a^2 + e^2$ tedy $b^2 = 56$

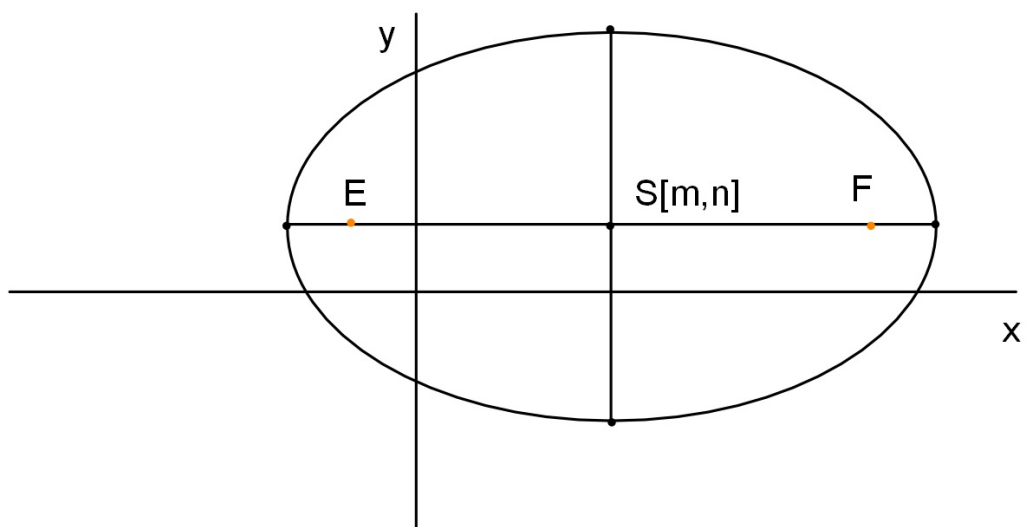
rovnice elipsy má tvar

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{56} = 1$$



Pokud je střed elipsy v obecné poloze $S[m,n]$, má středová rovnice tvar :

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$



Př. 2:

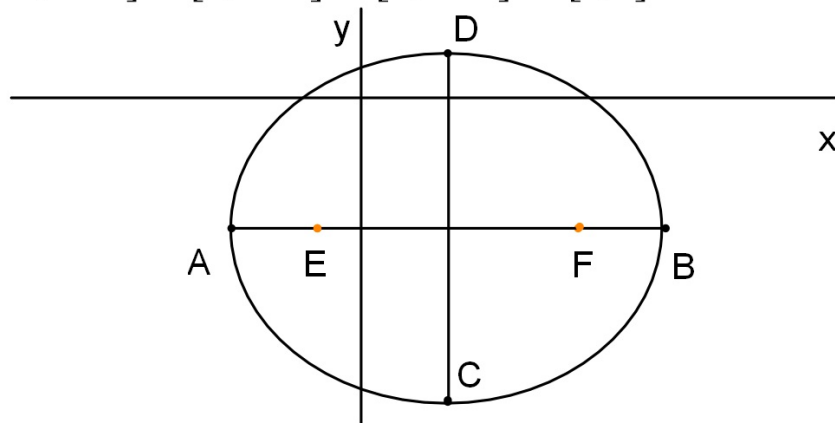
Napiš rovnici elipsy se středem $S[2, -3]$, $a = 5$, $e = 3$. Hlavní osa rovnoběžná se souřadnicovou osou x . Urči souřadnice ohnisek a vrcholů. Elipsu načrtni.

nejprve určíme b $b^2 = a^2 - e^2 = 25 - 9 = 16$ b je 4

rovnice elipsy: $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

souřadnice ohnisek $E[-1, -3]$ $F[5, -3]$

vrcholy $A[-3, -3]$ $B[7, -3]$ $C[2, -7]$ $D[2, 1]$



Rozepsáním středové rovnice získáme **obecnou rovnici elipsy**.

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2py + t = 0 \quad (pq > 0)$$

Př.3:

Elipsa má obecnou rovnici $e: x^2 + 4y^2 - 6x + 32y + 48 = 0$

Urči její středový tvar, souřadnice ohnisek a vrcholů.

Rovnici upravíme

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 8y + 16) - 64 + 48 = 0$$

$$(x - 3)^2 + 4(y + 4)^2 = 25$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{\frac{25}{4}} = 1 \quad S[3, -4], \quad a=5, \quad b=2,5, \quad a>b \quad e = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$A\left[-2, -4\right], B\left[8, -4\right], C\left[3, -\frac{13}{2}\right], D\left[3, -\frac{3}{2}\right]$$

Pracovní list :

1. Napiš rovnici elipsy s ohnisky $E[-2,2]$ $F[2,0]$ a $a=4$.
2. Ukaž že pro každé reálné t , leží bod $M[a \cos t, b \sin t]$ na elipse s rovnicí : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
4. Střed elipsy $S[2,-3]$, $a = 5$, $e = 3$. Napiš rovnici elipsy pro obě polohy, urči ohniska a elipsu nakresli.
5. Napiš rovnici elipsy s ohnisky $E[2,5]$, $F[10,5]$, která prochází $M[6,7]$. Situaci načrtni.
6. Najdi ohniska elipsy, známe-li její vrcholy $[1,-4]$, $[5,-2]$, $[1,0]$, $[-3,-2]$. Elipsu načrtni.

Zdroj :

**Končadrle, M., L. Boček: Analytická
geometrie pro gymnázia.**

*Nakladatelství Prometheus s.r.o, Praha,
1995.*